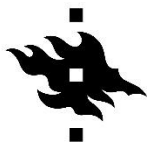


Ympyrä peruskoulun matematiikan etäopetuksessa

Lari Koskinen

21. syyskuuta 2020



HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIEDELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta		Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme Matematiikan koulutusohjelma	
Opintosuunta – Studierikning – Study track Aineenopettajan koulutus			
Tekijä – Författare – Author Lari Koskinen			
Työn nimi – Arbetets titel – Title Ympyrä peruskoulun matematiikan etäopetuksessa			
Työn laji – Arbetets art – Level Pro gradu -tutkielma		Aika – Datum – Month and year 9/2020	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages 25
Tiivistelmä – Referat – Abstract <p>Keväällä 2020 koronapandemia aiheutti peruskouluissa nopean aikataulun siirtymisen lähiopetuksesta etäopetukseen. Tässä pro gradu -tutkielmassa tutkitaan peruskoulun matematiikan sisällöistä ympyrän opettamisen järjestämistä etäopetuksena sekä pohditaan siihen liittyviä ongelmia.</p> <p>Etäopetus määritellään kahden elementin läsnäololla, jotka ovat opettajan ja oppilaan välinen etäisyys sekä järjestävän organisaation läsnäolo. Etäopetuksen kehitys voidaan jakaa teknologian kehityksen mukaisesti viiteen sukupolveen kolmen eri aikakauden aikana. Teknologian kehityksen myötä myös etäopetuksen pedagogiikka on kehittynyt. Kolme tunnistettavaa pedagogista aikakautta olivat kognitiivis-behavioristinen, sosiaali-konstruktivinen sekä konnektiivinen etäopetuksen pedagogiikka, joiden kaikkien läsnäolo on tärkeää etäopetukselle. Peruskoulussa opetetaan ympyrään liittyen ympyrän kehän ja pinta-alan laskeminen, jonka vuoksi esitellään piin likiarvon laskeminen Arkhimedeen käyttämällä menetelmällä, jossa hyödynnetään ympyrän sisä- ja ulkopuolelle piirrettyjen säännöllisten monikulmioiden piirejä. Lisäksi todistetaan ympyrän pinta-alan kaava matematiikan oppikirjan esittämällä periaatteella, jossa ympyrä jaetaan sektoreihin, joista muodostetaan suunnikasta vastaava kuvio.</p> <p>Tutkimustapana on laadullinen tapaustutkimus, jonka kohteena on yhden opettajan kahden viikon mittainen etäopetusjakso peruskoulussa Vantaalla. Opetuksen järjestäminen esitellään ja sitä analysoidaan pedagogisten sukupolvien näkökulmasta sekä harjoitustehtävien valintaa analysoidaan käyttäen uudistettua Bloomin taksonomiaa.</p> <p>Tutkielman tuloksina todetaan, että etäopetuksen järjestäminen oli toteutettu monipuolisesti siten, että eri etäopetuksen pedagogiikat olivat kaikki jossain muodossa havaittavissa. Sosiaalisen kanssakäymisen määrä oli kuitenkin oppilaista itsestään kiinni. Opetuksen tavoitteena oli opettaa perusasiat, joka näkyi harjoitustehtävien analysoinnissa siten, että suurin osa tehtävistä sijoittui samalle ajattelun ja tiedon tasolle, jossa vaaditaan menetelmätietoa sekä muistamista. Korkeamman ajattelun tason tehtäviä oli enemmän lisätehtävien muodossa. Syvällisempi esitettyjen todistusten läpikäynti olisi hankalaa kahdeksannen luokan oppilaille, sillä heiltä puuttuvat tarvittavat menetelmätiedot. Todistusten idean hahmottelu sen sijaan olisi mahdollista. Yleisinä matematiikan etäopetuksen haasteina todetaan matematiikan kirjoittaminen ja havainnollistaminen sähköisessä ympäristössä. Lisäksi oppilaskohtainen tehtävien tarkastaminen ja palautteen antaminen oli työlästä.</p> <p>Jatkotutkimuksena voisi olla laajempi katsaus matematiikan etäopetuksen toteuttamistapoihin tai matematiikkaan soveltuvien etäopetusalojen kehittäminen.</p>			
Avainsanat – Nyckelord – Keywords matematiikka, etäopetus, peruskoulu, ympyrä			
Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited			
Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information			

Sisältö

1	Johdanto	2
2	Etäopetus	3
2.1	Etäopetuksen määritelmä	4
2.2	Etäopetuksen teknologiset aikakaudet	4
2.3	Etäopetuksen pedagogiset sukupolvet	5
2.4	Uudistettu Bloomin taksonomia	5
3	Ympyrä	8
3.1	Ympyrä opetussuunnitelmissa	8
3.2	Ympyrän kehä ja piin arvo	9
3.3	Ympyrän pinta-ala	11
4	Tutkielman tavoitteet ja toteutus	16
5	Tapaus: Ympyrän etäopetus peruskoulussa	17
5.1	Etäopetuksen järjestely	17
5.2	Opetuksen järjestämisen toteutuminen pedagogisten sukupolvien kontekstissa	19
5.3	Harjoitustehtävien luokittelu uudistetussa Bloomin taksonomiassa	20
6	Yhteenveto ja pohdintaa	22

Luku 1

Johdanto

Koronaviruksen aiheuttaman pandemian vuoksi opettajat eri puolilla maailmaa joutuivat uuteen tilanteeseen, kun kouluissa siirryttiin perinteisestä lähiopetuksesta etäopetukseen. Uusi tilanne vaati joustamista niin opettajilta kuin oppilailta sekä nopeita päätöksiä etäopetuksen järjestämistavoista. Etäopetuksen päätyttyä oli helppo omalta osaltani jäädä pohtimaan, mitä olisin voinut tehdä paremmin sekä onnistuinko tavoitteissani opetuksen suhteen?

Tämän tutkielman tavoitteena on tutkia peruskoulun matematiikassa ympyrän etäopettamisen toteutusta. Tutkielman toinen luku käsittelee etäopetuksen teoriaa. Siinä käydään lyhyesti läpi tutkimuksen taustoja sekä määritellään etäopetuksen käsite tässä tutkielmassa sekä esitellään etäopetuksen kehityksellistä historiaa teknologisesti sekä pedagogisesti. Lisäksi esitellään uudistettu Bloomin taksonomia tämän tutkielman kontekstiin sidoten. Kolmannessa luvussa käydään läpi ympyrän esiintyminen opetussuunnitelmissa sekä tarkastellaan tarkemmin siihen liittyvät peruskoulussa opetettavat käsitteet, joita ovat pii, ympyrän kehä sekä ympyrän pinta-ala. Piille esitellään Arkhimedeiden käyttämä approksimointimenetelmä ja pinta-alan kaavalle esitetään täsmällinen geometrinen todistus. Todistuksissa pyritään käyttämään peruskoulussa ja lukiossa opittavia menetelmiä. Neljäs luku esittelee tutkimuskysymykset sekä tutkimustavan, joka on tapaustutkimus. Tapauksena toimii osa omasta etäopetukseni toteutuksesta keväällä 2020. Opetuksen järjestämistä reflektoidaan teoriaosion etäopetuksen pedagogisten sukupolvien kautta. Lisäksi etäopetuksessa käytettyjen tehtävänantojen osuvuutta tutkitaan uudistetun Bloomin taksonomian eri tasojen kautta. Lopuksi pohditaan muita matematiikan etäopetuksessa kohdattuja ongelmia.

Luku 2

Etäopetus

Kevätlukukausi 2020 oli hyvin poikkeuksellista aikaa Suomen kouluissa. Suomen hallitus päätyi 16.3.2020 ottamaan valmiuslain käyttöön koronavirustilanteesta johtuneiden poikkeusolojen vuoksi [14]. Hallituksen linjaamiin toimenpiteisiin kuului lähiopetuksen keskeyttäminen kouluissa sekä niiden tilojen sulkeminen. Erityisen tuen päätöksen saaneilla lapsilla sekä yhteiskunnan toiminnan kannalta kriittisillä aloilla työskennelleiden ensimmäisestä kolmanteen luokkalaisten lasten vanhempien oli poikkeuksellisesti mahdollisuus saada lähiopetusta. Etäopetusjakso alkoi 18.3.2020 ja jatkui 14.5.2020 asti, jolloin kouluissa palattiin takaisin lähipetukseen [15].

Koronakeväällä etäopetukseen siirtymisen mahdollisuuksia ja haasteita tutkittiin Mäkelän ja muiden kirjallisuuskatsauksessa [11]. He tunnistivat yhdeksän mahdollisuutta ja haastetta etäopetuksen järjestämisessä. Mahdollisuuksina tutkimuksessa nostettiin esille joustavuus, yksilöllistäminen, korkeatasoinen ohjaus, parantuneet oppimistulokset, tietotekniikan tarjomaat mahdollisuudet, vertaistuki, fyysisen ja mielenterveyden tuki oppilaille, hallinnollinen tehokkuus sekä opetuksen jatkuvuus poikkeustilanteissa. Haasteina nostettiin esille opetustapojen muutos, opettajan ja vanhempien roolien muuttuminen, oppimisvaikeudet, opettajien negatiivinen suhtautuminen teknologiaan, tietoteknisen osaamisen ja tuen puute, vanha teknologia, sosiaalisten kontaktien puute sekä oppilaiden fyysisen- ja mielenterveyden heikkeneminen.

Rice totesi vuonna 2006 tekemässään kirjallisuuskatsauksessa lasten ja nuorten etäopetukseen, että etäopetuksen vaikuttavuuteen vaikuttaa enemmän opettaja ja oppilas sekä opetusmenetelmät, kuin käytössä oleva viestintätapa [16]. Tutkimuksessa todetaan myös, että etäopetuksen tutkimus ylittäänsä on sekavaa, johtuen tutkimusten rajoittuneisuudesta, teorian puutteesta sekä tutkimuskohteen monimutkaisuudesta.

2.1 Etäopetuksen määritelmä

Etäopetuksen määritelmäksi on tarjolla monia eri näkemyksiä. Tässä tutkielmassa etäopetus määritellään Keeganin tunnistamien määritelmän pääelementtien mukaisesti kahden elementin läsnäololla. Ensimmäinen on opettajan ja opiskelijan välinen etäisyys, jolla tarkoitetaan sitä, että he eivät ole läsnä samassa tilassa. Toisena elementtinä on opetusta järjestävän organisaation läsnäolo, jolloin itseopiskelu, jolla tarkoitetaan itsenäistä opiskelua ilman järjestävän organisaation ohjausta, jää määritelmän ulkopuolelle. Opettajan ja opiskelijan välinen etäisyys johtaa siihen, että opetuksen järjestämiseksi tarvitaan jokin tekninen ratkaisu opetuksen sekä opettajan ja opiskelijan välisen kommunikaation järjestämiseksi. Tämä tekninen ratkaisu on vaihdellut teknologian kehityksen myötä. [6]

2.2 Etäopetuksen teknologiset aikakaudet

Teknologisen kehityksen mukaan etäopetuksella voidaan katsoa olevan viisi eri sukupolvea kolmella eri aikakaudella. Ensimmäisen sukupolven ja samalla aikakauden etäopetus oli kirjekoulutusta, jossa opettajan ja oppilaan välinen kommunikaatio tapahtui postin välityksellä. Kirjapainolla oli oma osuutensa kirjekoulutuksen mahdollistajana suuremmassa mittakaavassa. Yhtenä varhaisimmista kirjekoulutuksista voidaan pitää Caleb Phillipsin vuonna 1728 Boston Gazette -lehdessä mainostamia postin välityksellä pidettäviä pika-kirjoituskursseja. [3]

Etäopetuksen toista aikakautta määrittelee audio-visuaalisuus [3]. Etäopetuksen toisen sukupolven teknologioina ovat olleet yksisuuntaisen kommunikoinnin tarjonneet radio sekä televisio. Yhdysvalloissa 1920-luvulla korkeakoulut alkoivat tarjoamaan opetusta radiokanavien kautta ja 1930-luvulla kokeiltiin ensimmäisiä opetuksellisia televisio-ohjelmia. Kuitenkin vasta 1950-luvulla korkeakoulut alkoivat järjestämään opetusta television välityksellä. Kolmas sukupolvi alkoi 1970-luvulla, kun Isosta Britanniaasta lähti liikkeelle avoimen yliopiston konsepti, jonka tavoitteena oli tarjota laajamittaisesti koulutusta aikuisille. Neljäntenä sukupolven käynnistivät 1980-luvun vaihteen etäkokousten järjestämiseen soveltuvat teknologiat, jotka mahdollistivat ryhmien kaksisuuntaisen kommunikoinnin opettajan ja opiskelijoiden välillä. Näin etäopetus pääsi lähemmäksi perinteistä luokkapohjaista opetusta. Myöhemmin henkilökohtaiset tietokoneet mahdollistivat myös kaksisuuntaisten videokonferenssien järjestämisen. [10]

World Wide Web (eli www) pohjainen Internet aloitti etäopetuksen kolmannen aikakauden ja samalla viidennen sukupolven [3]. Verkkosivujen kautta opetusmateriaalin jakaminen helpottui, jonka vuoksi fokus siirtyi opettajan johtamasta etäopetuksesta opiskelijakeskeiseksi. Internet mahdollisti ohjaamisen järjestämisen reaaliaikaisesti sekä asynkronisesti kommunikoiden.

2.3 Etäopetuksen pedagogiset sukupolvet

Teknologian kehittyminen vaikutti myös etäopetuksen pedagogisiin ulottuvuuksiin. Anderson ja Dron ovat määritelleet kolme etäopetuksen pedagogista sukupolvea [1]. Ne ovat ilmentymisjärjestyksessään kognitiivis-behavioristinen, sosiaali-konstruktivinen sekä konnektiivinen etäopetuksen pedagogiikka. Heidän mukaansa kukin etäopetuksen pedagogiikka on oman aikakautensa tuote mutta kaikki kolme ovat edelleen läsnä etäopetuksessa ja kokonaisvaltaisen etäopetuksen järjestämisessä olisi tärkeää ottaa huomioon kaikki kolme pedagogista lähestymistapaa.

Andersonin ja Dronin mukaan kognitiivis-behavioristisessa etäopetuksen pedagogiikassa pääasiallinen oppimistapa oli itsenäinen valmiiksi opettajan määrittelemän tiedon sisäistäminen esimerkiksi lukemalla tai katsomalla opetusvideoita, jonka vuoksi sosiaalinen kanssakäyminen on lähes olematonta. Opettajan roolina oli suunnitella ja välittää opetettava sisältö oppilaalle sekä arvioida oppilaan tuotoksia. Kyseisen malli kehittyi, kun pääteknologioina olivat massamedia eli kirjoitettu teksti, radio, televisio sekä kahdenkeskinen yhteydenpito opettajan ja oppilaan välillä arviointia varten. [1]

Sosiaali-konstruktivisessa etäopetuksen pedagogiikassa uusi tieto rakentuu vanhan päälle sosiaalisessa kanssakäymisessä. Kaksisuuntaisen kommunikaation mahdollistaneiden teknologioiden kehitys toi sosiaalisen ulottuvuuden etäopetukseen, jolloin teknologia toimii tiedon välityksen lisäksi reaaliaikaisen ja asynkronisen kanssakäymisen välittäjänä. Opettajan roolina ei ole vain opiskeltavan tiedon välittäminen oppilaille, vaan myös tiedon rakentumisen vahvistaminen työskentelyn aikaisen kanssakäymisen ja arvioinnin avulla. [1]

Konnektiivisen etäopetuksen pedagogiikan mahdollisti World Wide Web -pohjainen Internet. Siinä oppiminen pohjautuu tietoverkkojen rakentamiseen sillä tiedon oletetaan olevan tarpeen vaatiessa löydettävissä ja sovellettavissa ratkaistavaa ongelmaa varten. Oppilaan ei oleteta muistavan kaikkea tietoa vaan oppivan mistä ongelman ratkaisemiseksi tarvittavaa tietoa voi alkaa etsimään. Opettajan roolina on opiskelijan tiedonhakutaitojen kehittäminen sekä esimerkin kautta ohjaaminen. Konnektiivisessa pedagogiikassa sosiaalinen aspekti näyttäytyy esimerkiksi aiemmin asiaan perehtyneiden kommentteina tai tuotoksina verkossa. [1]

2.4 Uudistettu Bloomin taksonomia

Alunperin vuonna 1956 julkaistussa Bloomin taksonomiassa on kuusi eri osaamisen tasoa eli ulottuvuutta, jotka ovat järjestyksessä yksinkertaisimmasta lähtien tieto, ymmärrys, soveltaminen, analyysi, synteesi, arviointi. Ajatuksena on, että aiempien tasojen vaatimusten pitää olla hallussa, jotta voi siirtyä seuraavalle tasolle. [7]

Uudistetussa Bloomin taksonomiassa yksiulotteinen luokittelu laajennetaan kaksiuulotteiseksi. Alkuperäiset kuusi ajattelun tasoa ovat edelleen käytössä mutta ne on uudelleennimetty tekemiseen viittaaviksi verbeiksi sekä kahden viimeisimmän järjestys on vaihdettu. Tasot ovat yksinkertaisimmasta lähtien muistaa, ymmärtää, soveltaa, analysoida, arvioida sekä luoda. Ajattelun tasot eivät ole toisensa poissulkevia, vaan niiden välillä on päällekkäisyyksiä. Taksonomian toisen ulottuvuuden muodostavat neljä tiedon tasoa, jotka ovat faktatieto, käsitetieto, menetelmätieto sekä metakognitiivinen tieto. Tasojen väliset suhteet ovat nähtävillä taulukossa 2.1, jota voidaan käyttää tutkittavan kohteen analysoinnin apuna. [7]

Tiedon taso	Ajattelun taso					
	1. Muistaa	2. Ymmärtää	3. Soveltaa	4. Analysoida	5. Arvioida	6. Luoda
A. Faktatieto						
B. Käsitetieto						
C. Menetelmä- tieto						
D. Metakogni- tiivinen tieto						

Taulukko 2.1: Uudistetun Bloomin taksonomian taulukko.

Kun taksonomiaa käytetään luokittelussa, hyödynnetään luokiteltavan aineiston sisältämiä verbejä ajattelun tason ja substantiiveja tiedon tason määrittelyssä, jolloin päädytään oikeaan taulukon soluun. Luokittelemisen tarkoituksena on kartoittaa mitä opetuksella saavutetaan tai jää saavuttamatta, ja tätä tietoa voidaan käyttää opetuksen kehittämisessä. [7]

Tässä tutkielmassa uudistetun Bloomin taksonomian tiedon tasojen on tulkittu sisältävän seuraavat asiat:

- Faktatieto: matemaattiset termit ja käytännöt, kuten muuttuja ja laskusäännöt.
- Käsitetieto: matemaattiset käsitteet ja mallit, kuten pituus, pinta-ala, säde ja halkaisija.
- Menetelmätieto: laskutaito, kuten laskujen ratkaisutavat.

- Metakognitiivinen tieto: ratkaisutapojen valinnat sekä oman osaamisensa tunnistaminen.

Lisäksi ajattelun tasojen on tulkittu sisältävän seuraavia asioita:

- Muistaa: esimerkiksi suureiden, yksiköiden, termien ja laskusääntöjen tunnistaminen sekä muistaminen.
- Ymmärtää: esimerkiksi kyky havainnollistaa tehtävänantoa tai selittää käsitteitä.
- Soveltaa: esimerkiksi laskukaavojen soveltaminen uusiin tilanteisiin.
- Analysoida: esimerkiksi olennaisen tiedon havaitseminen tehtävissä.
- Arvioida: esimerkiksi tuloksen järkevyyden arviointi.
- Luoda: esimerkiksi jonkin uuden luominen.

Luku 3

Ympyrä

Tarkastellaan ympyrän ilmentymistä perusopetuksen sekä lukion opetussuunnitelmissa. Lisäksi käydään läpi yksi tapa piin likiarvon laskemiseen, joka onnistuu peruskoulun päätävän tiedoilla sekä todistetaan ympyrän pinta-alan lauseke lukion pitkän matematiikan tarjoamilla menetelmillä.

3.1 Ympyrä opetussuunnitelmissa

Vuoden 2014 perusopetuksen opetussuunnitelmassa matematiikan sisällöt ja tavoitteet on jaoteltu vuosiluokittain [13]. Vuosiluokkien 1-2 geometriassa tutkitaan ja tunnistetaan kappaleita ja tasokuvioita. Lisäksi harjoitellaan mittaamista. Vuosiluokilla 3-6 tutustutaan tarkemmin eri kappaleisiin, kuten ympyrälieriöön ja ympyräkartioon. Lisäksi perehdytään tarkemmin tasokuvioihin, kuten ympyrään. Vuosiluokilla 7-9 harjoitellaan ympyrän pinta-alan, kehän ja kaaren pituuden sekä sektorin pinta-alan laskemista. Lisäksi lasketaan kolmiulotteisten objektien, kuten pallon, ympyrälieriöiden ja ympyräkartoiden pinta-aloja ja tilavuuksia. Ympyrään liittyvät myös sisällöistä kehä- ja keskuskulma sekä Thaleen lause.

Paikallisissa opetussuunnitelmissa oppiaineiden sisällöt voivat olla tarkemmin rajattu eri vuosiluokille. Esimerkiksi Vantaan perusopetuksen opetussuunnitelmassa ympyrä esiintyy kahdeksannella ja yhdeksännellä luokalla [17]. Kahdeksannella luokalla käydään läpi ympyrän kehän pituus ja pinta-ala, kaaren pituus ja sektorin pinta-ala sekä kehä- ja keskuskulma ja Thaleen lause. Yhdeksännellä luokalla tutkitaan kolmiulotteisia kappaleita, joissa myös ympyrä esiintyy osana.

Vuoden 2019 lukion opetussuunnitelmassa ympyrään liittyvät sisällöt ovat jakautuneet eri kursseille [12]. Pitkässä matematiikassa geometrian kurssilla MAA3 keskeisinä sisältöinä ovat muun muassa ympyrän ja sen osien ja siihen liittyvien suorien geomet-

ria sekä suoriin lieriöihin, suoriin kartioihin ja palloon liittyvät pituudet, pinta-alat ja tilavuudet. Analyyttisen geometrian kurssin MAA4 sisällöissä on ympyrän yhtälö. Funktiot ja yhtälöt 2 kurssilla MAA5 ovat keskeisissä sisällöissä yksikköympyrä sekä siihen liittyen trigonometriset funktiot sekä niiden symmetria- ja jaksollisuusominaisuudet. Lyhyen matematiikan geometrian kurssilla MAB3 sisältöinä ovat muun muassa kuvioiden ja kappaleiden pinta-alojen ja tilavuuksien määrittäminen.

3.2 Ympyrän kehä ja piin arvo

Ympyrään liittyy olennaisesti vakio pii, jota yleisesti merkitään kreikkalaisella kirjaimella π .

Määritelmä 3.1. Vakio π on ympyrän kehän ja halkaisijan pituuksien suhde.

Pii on irrationaaliluku, jonka likiarvon selvittämiseksi Arkhimedes kehitti menetelmän, jonka käyttämiseen yläkoulun matematiikka antaa työkalut. Arkhimedes laski piin likiarvolle ala- ja ylärajat käyttäen ympyrän sisä- ja ulkopuolelle piirrettyjä säännöllisiä monikulmioita. Tarkimman arvionsa hän perusti 96-sivuisen monikulmioon [5]. Vuonna 2019 piin likiarvo selvitettiin jo 31 biljoonan numeron tarkkuudella [2].

Katsotaan seuraavaksi Arkhimedeen menetelmää n -sivuisella säännöllisellä monikulmiolla. Olkoon ympyrän säde $r = \frac{1}{2}$, jolloin sen kehän pituus

$$(3.2) \quad p_{ymp} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi.$$

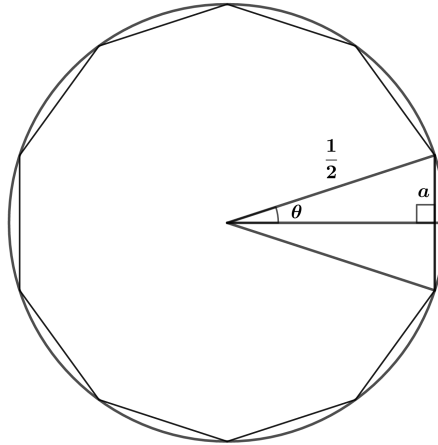
Kehän pituuden alarajaa voidaan approksimoida ympyrän sisälle piirretyn säännöllisen monikulmion piirillä p_{min} . Kuvasta 3.1 nähdään, että kyseisen monikulmion sivun pituus on $2a$ ja se voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion avulla

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{a}{\frac{1}{2}} \\ a &= \frac{1}{2} \sin \theta \\ 2a &= \sin \theta, \end{aligned}$$

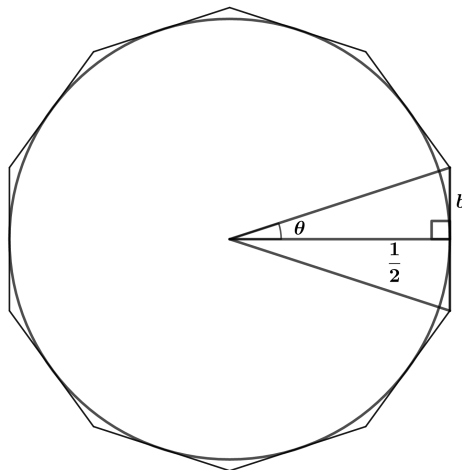
jossa kulma θ riippuu monikulmion sivujen määrästä n siten, että $\theta = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$. Näin ollen n -sivuisen säännöllisen monikulmion piiri

$$(3.3) \quad p_{min} = n \cdot 2a = n \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Kehän pituuden ylärajana on kuvan 3.2 mukaisesti ympyrän ulkopuolelle piirretyn sään-



Kuva 3.1: Säännöllinen monikulmio ympyrän sisäpuolella.



Kuva 3.2: Säännöllinen monikulmio ympyrän ulkopuolella.

nöllisen monikulmion piiri p_{max} , jonka sivun pituus $2b$ saadaan suorakulmaisesta kolmiosta

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{b}{\frac{1}{2}} \\ b &= \frac{1}{2} \tan \theta \\ 2b &= \tan \theta,\end{aligned}$$

jolloin sen piiri

$$(3.4) \quad p_{max} = n \cdot 2b = n \tan \frac{180^\circ}{n}.$$

Näin ollen yhtälöistä 3.2, 3.3 sekä 3.4 saadaan epäyhtälö

$$(3.5) \quad \begin{aligned} p_{\min} &\leq p_{\text{ymp}} \leq p_{\max} \\ n \sin \frac{180^\circ}{n} &\leq \pi \leq n \tan \frac{180^\circ}{n}. \end{aligned}$$

Kun approksimointiin käytetään 96-sivuista säännöllistä monikulmiota, saadaan piin arvon alarajaksi

$$p_{\min} = 96 \sin \frac{180^\circ}{96} \approx 3,14103$$

ja ylärajaksi

$$p_{\max} = 96 \tan \frac{180^\circ}{96} \approx 3,14272$$

siis

$$3,14103 \leq \pi \leq 3,14272.$$

Vertailun vuoksi, Arkhimedes laski 96-sivuista säännöllistä monikulmiota hyödyntäen piin arvon välille

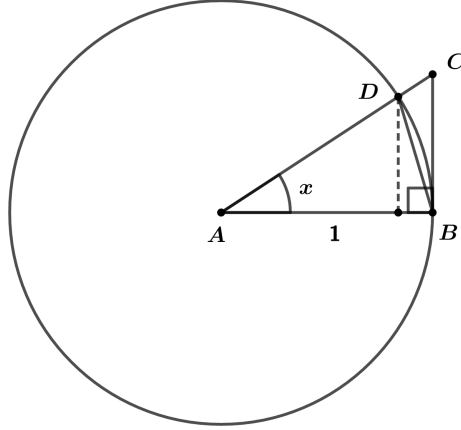
$$\begin{aligned} 3\frac{10}{71} &< \pi < 3\frac{1}{7} \\ 3,14084 &< \pi < 3,14286. \end{aligned}$$

3.3 Ympyrän pinta-ala

Yläkoulun matematiikan oppikirjassa Kuutio 8 oppilasta johdatellaan ympyrän pinta-alan lausekkeeseen siten, että ympyrä jaetaan sektoreihin, jotka uudelleenjärjestellään vastaamaan suorakulmiota, kun sektoreiden määrä kasvaa loputtomiin [4]. Saadun suorakulmion kannan pituutena on ympyrän kehä ja korkeutena ympyrän säde. Peruskoulun päättysesä oppilaalla ei ole kaikkia tarvittavia työkaluja pinta-alan lausekkeen täsmällisempään todistamiseen mutta lukion pitkässä matematiikassa vastaan tuleva raja-arvon käsite sekä trigonometria ja yksikköympyrä mahdollistavat todistuksen rakentamisen. Todistetaan seuraavaksi ympyrän pinta-alan lauseke geometrisesti lukion pitkän matematiikan opiskelijalle tutuilla menetelmillä. Todistuksessa tarvitaan raja-arvon, itseisarvon, epäyhtälöiden sekä yksikköympyrän ja trigonometrinen funktioiden käsitteitä.

Aluksi tarvitaan lause raja-arvolle, jota hyödynnetään varsinaisessa pinta-alan lausekkeen todistuksessa.

Lause 3.6. *Raja-arvo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ pätee.*



Kuva 3.3: Yksikköympyrä sekä kolmiot ABC ja ABD .

Todistus. Piirretään kuvan 3.3 mukaisesti yksikköympyrä sekä siihen kolmiot ABC ja ABD . Olkoon $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Kuvasta 3.3 huomataan, että kolmion ABD pinta-ala

$$A_{ABD} = \frac{1 \cdot |\sin x|}{2} = \frac{|\sin x|}{2},$$

kolmion ABC pinta-ala

$$A_{ABC} = \frac{1 \cdot |\tan x|}{2} = \frac{|\tan x|}{2}$$

ja kulman x rajoittaman sektorin pinta-ala

$$A_{sektori} = \frac{|x|}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{|x|}{2}.$$

Lisäksi on nähtävissä, että pinta-aloille pätee

$$|A_{ABD}| \leq |A_{sektori}| \leq |A_{ABC}|.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \frac{|\sin x|}{2} &\leq \frac{|x|}{2} \leq \frac{|\tan x|}{2} \\ |\sin x| &\leq |x| \leq |\tan x| \\ 1 &\leq \frac{|x|}{|\sin x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\cos x| |\sin x|} \\ 1 &\leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \end{aligned}$$

koska $\sin x \leq 0$, kun $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$ ja $\sin x \geq 0$, kun $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ sekä $\cos x \geq 0$, kun $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Ottamalla käänteisluvut saadaan

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x,$$

jolloin raja-arvo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} 1 &\geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \\ 1 &\geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1 \end{aligned}$$

Näin ollen

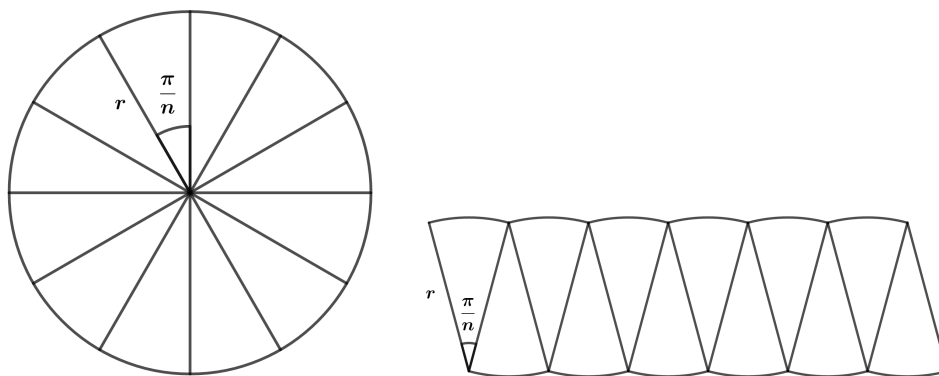
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

□

Nyt voidaan todistaa ympyrän pinta-alan lauseke.

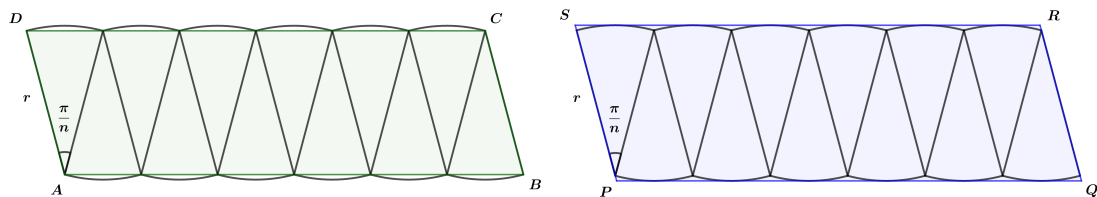
Lause 3.7. *Olko r ympyrän säde. Ympyrän pinta-ala on πr^2 .*

Todistus. Jaetaan r säteinen ympyrä $2n$ yhtäsuureen sektoriin ja järjestellään sektorit kuvan 3.4 mukaisesti. Kun sektoreiden määrä kasvaa rajatta, kuvion muoto lähenee suunnikasta. Kuvasta 3.5 on nähtävissä, että ympyrän pinta-ala A on suunnikkaiden $ABCD$ sekä $PQRS$ pinta-alojen rajoittama siten, että $A_{ABCD} \leq A \leq A_{PQRS}$.

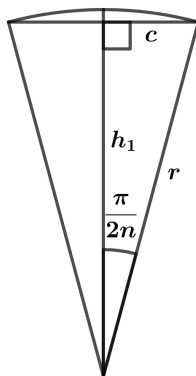


Kuva 3.4: Ympyrän jako sektoreihin ja sektoreiden järjestely.

Suunnikkaan $ABCD$ kanta koostuu n määrstä sektoreiden jäniteistä, jolloin kuvan 3.6 mukaisesti trigonometrisiä funktioita hyödyntäen voidaan selvittää kannan pituus a



Kuva 3.5: Ympyrän pinta-alaa rajoittavat suunnikkaat.



Kuva 3.6: Yksittäinen sektori.

$$a = 2nc = 2nr \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Kun sektoreiden määrä kasvaa rajatta eli n lähestyy ääretöntä, kannan pituuden raja-arvo on

$$(3.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \sin \frac{\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2nr \frac{\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \sin \frac{\pi}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} = \pi r,$$

koska lauseen 3.6 perusteella $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Suunnikkaan $ABCD$ korkeus h_1 saadaan myös selvitettyä trigonometrisillä funktioilla kuvasta 3.6, joten

$$h_1 = r \cos \frac{\pi}{2n}$$

ja sen raja-arvo

$$(3.9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} r \cos \frac{\pi}{2n} = r,$$

koska $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x} = 1$. Näin ollen suunnikkaan pinta-alan A_{ABCD} raja-arvo on

$$(3.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{ABCD} = \lim_{n \rightarrow \infty} ah_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} h_1 = \pi r^2$$

raja-arvojen 3.8 ja 3.9 perusteella.

Suunnikkaan PQRS kannan pituus on sama kuin suunnikkaalla $ABCD$. Kuvasta 3.5 nähdään, että suunnikkaan $PQRS$ korkeus h_2 saadaan lisäämällä sektorin säteeseen r kuvassa 3.6 olevan segmentin korkeus, jolloin

$$h_2 = r + r - h_1,$$

jonka raja-arvo on

$$(3.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (r + r - h_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2r - \lim_{n \rightarrow \infty} h_1 = 2r - r = r$$

raja-arvon 3.9 perusteella. Näin ollen suunnikkaan PQRS pinta-alan A_{PQRS} raja-arvo

$$(3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{PQRS} = \lim_{n \rightarrow \infty} ah_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} h_2 = \pi r^2.$$

Nyt raja-arvojen 3.10 ja 3.12 vuoksi ympyrän pinta-ala rajoittuu välille

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{ABCD} \leq A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_{PQRS} \\ \pi r^2 \leq A \leq \pi r^2.$$

Koska ympyrän pinta-alaa rajoittavien suunnikkaiden pinta-alat suppenevat samaan arvoon, ympyrän pinta-ala $A = \pi r^2$. □

Luku 4

Tutkielman tavoitteet ja toteutus

Tämän tutkielman tarkoituksena on analysoida keväällä 2020 toteutettu ympyrän etäopetuksen tapaus sekä pohtia siihen liittyviä ongelmia. Tutkimuksen kohteena on opetuksen järjestämistavan monimuotoisuus, jonka vuoksi oppilaiden oppimisen kannalta aihetta ei käsitellä. Tutkimuskysymyksinä voidaan pitää seuraavia:

1. Miten matemaattisen aiheen etäopetuksen voi järjestää?
2. Millä tavoin etäopetuksen järjestäminen onnistui tapauksessa?
3. Millaisia matematiikan etäopetuksen haasteita tapauksessa oli havaittavissa?

Tutkimus toteutettiin laadullisena tapaustutkimuksena, jonka kohteena oli yhden opettajan järjestämä kaksi viikkoa kattava etäopetusjakson osuus peruskoulussa Vantaalla. Opetettavina aiheina olivat kahdeksannen luokan tasogeometrian osa-alueista ympyrän kehä, kaaren pituus, ympyrän pinta-ala sekä sektorin pinta-ala.

Ensimmäiseen tutkimuskysymykseen vastataan kuvailemalla tapauksessa käytetyt etäopetuksen menetelmät sekä tehtävänannot. Toista kysymystä lähestytään tutkimalla etäopetuksen järjestämisen toteutumista pedagogisten sukupolvien kontekstissa sekä analysoimalla valikoitujen tehtävien sijoittumista uudistetun Bloomin taksonomian taulukkoon, jotta saataisiin selville, mille ajattelun tasolle opetuksessa olisi mahdollista päästä. Kolmanteen kysymykseen vastataan refleктоimalla kokemuksia opetuksen järjestämisestä.

Luku 5

Tapaus: Ympyrän etäopetus peruskoulussa

Käydään seuraavaksi läpi tutkittavan tapauksen etäopetuksen tavoitteet sekä toteutustavat.

5.1 Etäopetuksen järjestely

Koska etäopetukseen siirryttiin lyhyellä varoitusajalla kesken kevätlukukauden 2020, etäopetuksen järjestämisen periaatteena oli pitää opiskelu mahdollisimman tutun oloisena, jotta siirtyminen pois tutusta lähiopetuksesta olisi oppilaille helpompaa. Pääasiallisina työvälineinä toimivat edelleen matematiikan oppikirja sekä vihko. Kahdeksannen luokan ryhmien kanssa siirtyminen etäopetukseen tapahtui kesken tasogeometrian läpikäynnin siten, että ensimmäisiä uusia opetettavia sisältöjä olivat ympyrän kehä, kaaren pituus, ympyrän pinta-ala sekä sektorin pinta-ala. Tavoitteena oli opettaa aiheiden perusteet, sillä niiden pariin palattaisiin yhdeksännellä luokalla avaruusgeometriassa. Kutakin aihetta varten oli varattu kaksi 45 minuutin oppituntia.

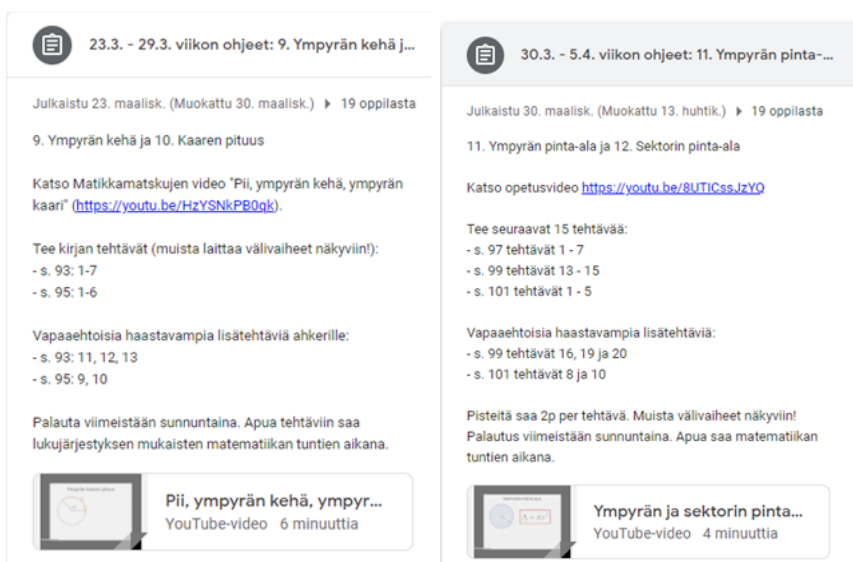
Tehtävänannot olivat viikottaiset, jotta harjoitustehtävissä voisi edetä omaa tahtia viikon aikana. Tehtävänannot koostuivat opetusvideoista sekä ennalta valikoiduista oppikirjan harjoitustehtävistä. Opetusvideoiden tarkoituksena oli korvata lähiopetuksen opettajajohtoinen teoriaosio oppitunneilta. Videoiden valinnassa kriteereinä oli videon pituus sekä selkeä esitystapa. Ajatuksena oli, että lyhyempi video jaksettaisiin katsoa loppuun asti tai uudelleen tarvittaessa.

Ensimmäisen viikon tehtävänannon Matikkamatskujen opetusvideolla käsiteltiin pii, ympyrän kehä ja ympyrän kaari [8]. Video käy läpi piin määritelmän sekä siinä johdetaan ympyrän kehän laskukaava piin määritelmästä yhtälönratkaisumenetelmin. Lisäksi video

käy läpi keskuskulman käsitteen sekä kaaren pituuden laskukaavan. Varsinaisia laskuesimerkkejä video ei tarjoa.

Toisen viikon tehtävänannon Matikkamatskujen opetusvideolla käsiteltiin ympyrän ja sektorin pinta-alan laskeminen [9]. Siinä johdatellaan ympyrän pinta-alan laskukaava jakamalla se sektoreihin, joista muodostetaan suunnikasta vastaava kuvio, jonka kannasta ja korkeudesta saadaan sen pinta-ala. Lisäksi sektorin pinta-alan kaava esitellään kaaren pituuden laskukaavan samanlaisuuteen viitaten. Esimerkkejä videolla ei ollut.

Harjoitustehtävien määrä pyrittiin pitämään kohtuullisena, jotta oppilaat eivät kuormittuisi liikaa, kun otetaan huomioon myös muiden samaan aikaan opiskeltavien oppiaineiden vaatimukset. Sopivana tehtävien määränä pidettiin neljää tehtävää oppituntia kohden. Oppikirjasta tehtävät valittiin sillä periaatteella, että oppilaat oppisivat ympyrään liittyvien peruslaskujen laskemisen. Lisätehtävien tarkoituksena oli tarjota lisähaastetta ja eriyttää opetusta ylöspäin. Alaspäin eriyttäminen tapahtui joidenkin erityisen tuen oppilaiden kohdalla käyttämällä eri oppikirjaa, eikä heidän kirjansa tehtäviä ole tässä tutkielmassa huomioitu. Viikottaiset tehtävät tuli palauttaa opetusryhmän omaan Google Classroomiin, jotta opettaja pystyi tarkistamaan edistymisen sekä antamaan palautetta ratkaisuksista. Palautuksen sai tehdä valokuvina vihkon sivuista, joka oli selkeästi suosituin menetelmä, tai kirjoittamalla ratkaisut tekstinkäsittelyohjelmalla. Annetut tehtävänannot ovat nähtävillä kuvassa 5.1 sellaisena, kuin ne Google Classroomissa olivat. Käytössä oli Sanoma Pron kustantama Kuutio 8 oppikirja.



Kuva 5.1: Viikottaiset tehtävänannot Google Classroom -kuvakaappauksina.

Lukujärjestyksessään kahdeksannen luokan oppilailla oli neljä matematiikan tuntia vii-

kossa. Lukujärjestyksen mukaisten oppituntien aikana opettaja oli paikalla Google Meets -videopuhelussa, jossa oppilailla oli mahdollisuus pyytää apua tehtävien ratkaisuun tai muuten vain sosialisoida muiden paikalla olleiden oppilaiden sekä opettajan kanssa. Tarkoituksena oli simuloida normaalia luokkahuonetyöskentelyä. Lisäksi oppilailla oli mahdollisuus olla yhteydessä opettajaan asynkronisesti Google Classroomissa ryhmän tehtävien kommenttiosioden sekä koululla käytössä olleen Wilma-järjestelmän kautta.

5.2 Opetuksen järjestämisen toteutuminen pedagogisten sukupolvien kontekstissa

Kognitiivis-behavioristinen etäopetuksen pedagogiikka oli vahvasti läsnä, sillä tehtävänannot oli pääosin suunniteltu itsenäiseen opiskeluun soveltuviksi, eikä sosiaalista kanssakäymistä erityisesti oppilaiden välillä oletettu tapahtuvan. Opiskeltavat sisällöt olivat valmiiksi opettajan rajaamia sekä opetusmateriaali tarkasti määritelty. Lisäksi oppilaiden ratkaisut arvioitiin ja palautettiin nähtäväksi.

Sosiaali-konstruktivinen pedagogiikka näkyi opetuksen järjestämisessä sosiaalisena kanssakäymisenä videopuheluiden sekä asynkronisessa teksipohjaisessa kommunikoinnissa opettajan ja oppilaiden välillä. Videopuhelu mahdollisti opettajalle palautteen ja neuvojen antamisen tehtävien ratkaisun aikana sekä oppilaille avun tai lisäopetuksen pyytämisen tarpeen vaatiessa.

Konnektiivisen pedagogiikan elementtejä oli läsnä siten, että oppilaille oli tarjottu valmiiksi opetusvideot aiheen läpikäymiseksi, jolloin enemmän tietoa kaipaava mutta sosiaalista kanssakäymistä karttava oppilas saattoi hakea itse uusia opetusvideoita, jos opettajan valitsema ei riittänyt. Lisäksi oppilaille oli mahdollista lukea tehtävänantojen kommenttiosioissa toistensa tekemiin kysymyksiin opettajan antamia vastauksia, jolloin kysyjä ja vastaaja loivat konnektiivisen pedagogiikan mukaista sisältöä.

Kaikki kolme etäopetuksen pedagogiikka olivat jossain muodossa läsnä opetuksen järjestämisessä, mutta sosiaali-konstruktivisen sekä konnektiivisen pedagogiikan osalta ratkaisevassa asemassa oli oppilaan oma toiminta. Sosiaali-konstruktivisuuden osalta kukin oppilas itse päätti sosiaalisen osallisuutensa määrän ja laadun. Kaikki oppilaat eivät hyödyntäneet mahdollisuuksia sosiaaliseen kanssakäymiseen tai avun saantiin tehtävien ratkaisemisessa. Konnektiivisuuden määrä riippui täysin oppilaasta, sillä sen suuntaiseen toimintaan ei oppilaita ohjattu. Oli oppilaasta itsestään kiinni, seuraako kommentteissa käytävää dialogia tai etsikö itsenäisesti vastauksia Internetistä vai ei.

5.3 Harjoitustehtävien luokittelu uudistetussa Bloomin taksonomiassa

Valittujen harjoitustehtävien luokittelu tehtiin tutkimalla niiden sanallisia ja kuvallisia ohjeita. Tehtävien luokittelussa tehtävänannon verbit vaikuttivat ajattelun tason sekä substantiivit tiedon tason määrittelyyn. Lisäksi huomioitiin tehtävän ratkaisemiseen vaadittavaa osaamista, jota itse tehtävänanto ei suoraan kerro. Luokittelun tukena käytettiin seuraavia esimerkkejä:

- Esimerkkejä tiedon tasoista:
 - Selittäminen vaatii faktatietoa.
 - Yksikönmuunnokset vaativat käsitetietoa.
 - Laskeminen vaatii menetelmätietoa.
 - Tehtävien valinta ja omien kykyjensä havainnointi vaatii metakognitiivista tietoa.
- Esimerkkejä ajattelun tasoista:
 - Suora kaavaan sijoittaminen vaatii laskusääntöjen muistamista.
 - Kysytyn asian sekä annettujen lähtötietojen tunnistaminen vaatii ymmärtämistä.
 - Kaavan käyttö uusissa tilanteissa vaatii soveltamista.
 - Tehtävänannossa suoraan antamatta jääneiden tietojen selvittäminen sekä tehtävään sopivien kaavojen valinta vaatii analysointia.
 - Ratkaisujen oikeellisuuden päättelemine vaatii arviointia.
 - Oman harjoitustehtävän kehittäminen vaatii luomista.

Moniosaisissa tehtävissä, jotka on jaoteltu esimerkiksi a- ja b-osiin, kukin osa luokiteltiin erikseen omana tehtävänä, sillä niillä voi olla eri vaatimukset osaamisen suhteen. Lisäksi perustehtävät ja lisätehtävät luokiteltiin erikseen. Taulukossa 5.1 on nähtävillä kuhunkin soluun luokiteltujen tehtävien määrä siten, että ensin on perustehtävien määrä ja suluissa lisätehtävien määrä.

Taulukosta 5.1 on nähtävissä, että tiedon tasoilla lähes joka tehtävä vaatii menetelmätietoja. Poikkeuksena olivat kaksi tehtävää, joissa tulkittiin kuvaa. Metakognitiivisen tiedon tasolle itse harjoitustehtävät eivät yltäneet mutta oppilaan valintaa tehdä lisätehtäviä voisi pitää metakognitiivisena prosessina. Ajattelun tasoilla muistaminen ja ymmärtäminen olivat pääosassa, kun katsotaan sekä perus- että lisätehtäviä. Soveltamista vaati

Tiedon taso	Ajattelun taso					
	1. Muistaa	2. Ymmärtää	3. Soveltaa	4. Analysoida	5. Arvioida	6. Luoda
A. Faktatieto	1	1				
B. Käsitetieto						
C. Menetelmä- tieto	40	7 (6)	2 (3)	(2)		
D. Metakogni- tiivinen tieto						

Taulukko 5.1: Tehtävien sijoittuminen uudistetun Bloomin taksonomian taulukkoon. Su-
luissa lisätehtävien sijoittuminen

yhteensä vain viisi tehtävää. Niissä soveltaminen ilmeni opitun asian yhdistämisessä ai-
emmin opiskeltuun. Analysointia havaittiin vain kahdessa lisätehtävässä, joissa tehtävän-
antoa joutui tarkastelemaan tarkemmin laskemisessa tarvittavien tietojen selvittämiseksi.
Arviointia ja luomista tehtävissä ei ollut.

Suurin osa valituista tehtävistä sijoittui taksonomian tasolle C1 eli niissä vaadittiin
kaavojen käytön muistamista sekä menetelmätietona laskutaitoa. Tämä on osittain har-
haanjohtavaa, sillä suuri osa kunkin oppikirjan kappaleen alkupään perustehtävistä oli
moniosaisia, jolloin sama tehtävätyyppi tuli useaan kertaan vastaan.

Luku 6

Yhteenveto ja pohdintaa

Vastauksena tutkimuskysymyksiin, ensimmäisen kysymyksen osalta kuvailtu tapaus osoittaa, että matemaattisen aiheen etäopetuksen monipuolinen järjestäminen oli toteutettavissa myös nopealla suunnittelulla ilman aiempaa teoreettista tietoa etäopetuksesta.

Toiseen tutkimuskysymykseen voidaan todeta, että etäopetuksen pedagogiikan osalta järjestettyä opetusta voi pitää monipuolisena, sillä kaikki pedagogiset sukupolvet ilmentyivät tavalla tai toisella opetuksen järjestämisessä. Huolena kuitenkin on, että niiden täytyminen on enemmän kiinni oppilaan toiminnasta, kuin opettajan. Etäopetuksessa oppilaan läsnäoloa ei voi varmistaa, sillä vaikka hän olisi näennäisesti paikalla esimerkiksi videopuhelussa, ei opettajalla ole varmuutta opetuksen seuraamisen tasosta. Tämä johtuu siitä, että oppilaalle on mahdollista tehdä tietokoneella muuta, kuin seurata opetusta. Tämän vuoksi ainoa todellinen tapa seurata oppimista on palautettujen tehtävien kautta.

Harjoitustehtävien valinnassa perusosaaminen oli pääosassa, joka uudistetun Bloomin taksonomian taulukoinnin mukaan toteutui. Kuitenkin oppilaille olisi hyvä tarjota myös korkeammalle ajattelun tasolle yltäviä tehtäviä mutta silloin pelkona olisi etäopetustilanteen kuormittavuuden kasvun myötä oppilaiden jaksaminen. Lisäksi oppikirja ei välttämättä tarjoa analysointia korkeampaa ajattelua vaativia tehtäviä, sillä lisätehtäviksi pyrittiin jo valitsemaan vaikeampia vaihtoehtoja. Harjoitustehtävien vaikuttavuuteen ei tämän tutkimuksen pohjalta voi ottaa kantaa, sillä oppilaille oli mahdollista itse valita, tekevätkö he haastavampia lisätehtäviä. Lisäksi oppilaat saattoivat tehdä yhteistyötä tehtävien ratkaisemissa tai kopioida toistensa ratkaisuja kokonaisuudessaan. Tällainen toiminta oli havaittavissa, kun tehtävien ratkaisuissa oli toistuvasti samoja virheitä oppilaiden välillä. Uudistetun Bloomin taksonomian ongelmana on luokittelun subjektiivisuus, sillä valmiita luokitteluautomaatteja ei ole.

Syväisempi ympyrään liittyvien todistusten läpikäynti olisi etäopetustilanteessa ja myös lähiopetustilanteessa hankalaa kahdeksannen luokan oppilaiden kanssa, sillä heille ei ole vielä opetettu todistuksissa vaadittavia trigonometrisiä menetelmiä. Todistuksen

idean hahmottelu olisi kuitenkin suotavaa, sillä valmiudet esimerkiksi juuri Arkhimedeen piin approksimaation menetelmän ymmärtämiseen heillä pitäisi olla. Tutkielmassa esitellyn ympyrän pinta-alan kaavan todistus sen sijaan ei ole ajankohtainen peruskoululaiselle, vaan opetusvideossa esitelty perustelu olkoon riittävä. Kyseiset menetelmät kuitenkin voisivat tarjota lukion pitkän matematiikan opiskelijalle korkeamman ajattelun tasoa vaativaa haastetta.

Kolmanteen tutkimuskysymykseen voidaan havainnoida, että yhtenä haasteena oli matematiikan kirjoittaminen ja havainnollistaminen sähköisessä ympäristössä. Matematiikkaa voi kirjoittaa ja kuvioita piirtää ohjelmistoilla mutta niiden käytön opetteleminen olisi pois matematiikan sisältöjen opiskelusta, jonka vuoksi käsin tehtävien ratkaiseminen on luontevampaa ja nopeampaa. Opettajana matematiikan kirjoittaminen ja havainnointi reaaliajassa ratkaistiin hyödyntämällä virtuaalista liitutaulua sekä piirtopöytää, joka jaettiin oppilaille nähtäväksi videopuhelun kautta.

Palautettujen tehtävien yksilöllinen tarkistaminen ja arviointi vei paljon aikaa opettajalta. Ratkaisuna tähän voisi olla automaattisen tarkistuksen käyttö. Automaattinen tarkistus vaatisi kuitenkin alustan, joka pystyisi käymään läpi myös tehtävien välivaiheet, eikä vain tarkistaisi lopullista vastausta. Vastauksen tarkistamisen oppilas voi itse tehdä oppikirjan vastaussivujen avulla.

Koska tämä tutkielman tutkimuskohteena oli yhden opettajan toteuttama etäopetus, voisi jatkotutkimuksen tehdä laajemmalla otannalla, jolloin voitaisiin selvittää käytännössä toimivia matematiikan etäopetuksen järjestämistapoja. Saatuja tuloksia voisi käyttää esimerkiksi opettajien täydennyskoulutuksen sekä opettajankoulutuksen tukena. Toisena tutkimuskohteena voisi olla etäopetusalustojen kehittäminen matematiikkaa ajatellen. Koska koronakevään 2020 kaltaista koko peruskoulujärjestelmän kattavaa siirtymistä etäopetukseen ei välttämättä tapahdu uudelleen, nyt olisi oiva aika tutkia etäopetusta eri kannoilta.

Kirjallisuutta

- [1] Anderson, T. & Dron, J. (2011). *Three Generations of Distance Education Pedagogy*. The International Review of Research in Open and Distributed Learning, 12(3), 80-97. <https://doi.org/10.19173/irrodl.v12i3.890>
- [2] BBC News (14.3.2019). *Emma Haruka Iwao smashes pi world record with Google help*. Verkkosivu luettu 28.8.2020: <https://www.bbc.com/news/technology-47524760>
- [3] Bozkurt, A. (2019). *From Distance Education to Open and Distance Learning: A Holistic Evaluation of History, Definitions, and Theories*. S. Sisman-Ugur, & G. Kurubacak (Eds.), Handbook of Research on Learning in the Age of Transhumanism (252-273). Hershey, PA: IGI Global.
- [4] Hassinen, S., Latva O., Makkonen J.-P., Pirttimaa M., Tolvanen A. (2017). *Kuutio 8*. Sanoma Pro. ISBN 9789526340319.
- [5] Heath, T. (1897). *The Works of Archimedes*. Cambridge University Press.
- [6] Keegan, D. (1980). *On defining distance education*. Distance Education, 1:1, 13-36, DOI: 10.1080/0158791800010102
- [7] Krathwohl, D. (2002). *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview*. Theory Into Practice, 41:4, 212-218, DOI: 10.1207/s15430421tip4104_2
- [8] Matikkamatskut (17.11.2014). *Pii, ympyrän kehä, ympyrän kaari*. Katsottu 30.8.2020: <https://youtu.be/HzYSNkPB0qk>
- [9] Matikkamatskut (17.11.2014). *Ympyrän ja sektorin pinta-alan laskeminen*. Katsottu 30.8.2020: <https://youtu.be/8UTICssJzYQ>
- [10] Moore, M. & Kearsly, G. (2011). *Distance Education: A Systems View of Online Learning (3rd ed)*. Wadsworth Cengage Learning, Belmont, CA. ISBN 9781111520991.

- [11] Mäkelä, T., Mehtälä, S., Clements, K., Seppä, J. (2020). *Schools Went Online Over One Weekend: Opportunities and Challenges for Online Education Related to the COVID-19 Crisis*. Proceedings of EdMedia + Innovate Learning 2020, 77-85. Waynesville: Association for the Advancement of Computing in Education (AACE). Luetavissa <https://jyx.jyu.fi/handle/123456789/71096>
- [12] Opetushallitus (2019). *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019*.
- [13] Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*.
- [14] Opetus- ja kulttuuriministeriö, Sosiaali- ja terveysministeriö, Valtioneuvoston viestintäosasto (2020). *Hallitus on todennut yhteistoiminnassa tasavallan presidentin kanssa Suomen olevan poikkeusoloissa koronavirustilanteen vuoksi*. Verkkosivu luettu 10.8.2020: <https://minedu.fi/-/10616/hallitus-totesi-suomen-olevan-poikkeusoloissa-koronavirustilanteen-vuoksi>
- [15] Opetus- ja kulttuuriministeriö, Valtioneuvoston viestintäosasto (2020). *Hallitus päätti varhaiskasvatuksen ja perusopetuksen rajoitteiden purkamisesta*. Verkkosivu luettu 10.8.2020: <https://valtioneuvosto.fi/-/10616/hallitus-paatti-varhaiskasvatuksen-ja-perusopetuksen-rajoitteiden-purkamisesta>
- [16] Rice, K. (2006). *A Comprehensive Look at Distance Education in the K-12 Context*, Journal of Research on Technology in Education, 38:4, 425-448, DOI: 10.1080/15391523.2006.10782468
- [17] Vantaawiki (2020). *Vantaan suomenkielisen perusopetuksen opetussuunnitelmat: Matematiikka*. Verkkosivu luettu 1.9.2020: <http://vantaawiki.fi/pops/Matematiikka>